FELADATOK A „POLINOMOK” TÉMAKÖRHÖZ

1. rész

2.1. Feladat. Végezzen maradékos osztást az f és g polinomokon a megadott polinomgyűrűben:
(a) $f = 2x^5 + 5x^4 - 9x^3 - x^2 + 10x + 3,\ g = x^3 + 4x^2 + x - 2,\ \mathbb{R}[x]$;
(b) $f = x^5 + x^3,\ g = x^3 + x^2 + \overline{1},\ \mathbb{Z}_2[x]$;
(c) $f = x^6 + x^5 + \overline{3}x^4 + \overline{4}x^2 + \overline{3},\ g = x^2 + \overline{3}x + \overline{2},\ \mathbb{Z}_5[x]$.

2.2. Feladat. Osztható-e az
(a) $f = x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ polinom a $g = x^2 + 1$ polinommal a $\mathbb{Q}[x]$ polinomgyűrűben;
(b) $f = x^4 + 1$ polinom a $g = x^2 + \sqrt{2}x + 1$ polinommal az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben;
(c) $f = x^3 + (3+i)x^2 + (2+3i)x + 2i$ polinom a $g = x + i$ polinommal a $\mathbb{C}[x]$ polinomgyűrűben;
(d) $f = x^{17} - x^{16} + x^{15} - x^{14} + x^7 - x^3 + x - 1$ polinom a $g = x^2 - 1$ polinommal a $\mathbb{Q}[x],\ \mathbb{R}[x],\ \mathbb{C}[x]$ polinomgyűrűkben;
(e) $f = x^4 + \overline{3}x^3 + x^2 + \overline{41}$ polinom a $g = x - \overline{3}$ polinommal a $\mathbb{Z}_5[x],\ \mathbb{Z}_7[x],\ \mathbb{Z}_{11}[x]$ polinomgyűrűkben;
(f) az $f = x^{17} - x^{16} + x^{15} - x^{14} + x^7 - x^3 + x - \overline{1}$ polinom a $g = x^2 - \overline{1}$ polinommal a $\mathbb{Z}_3[x],\ \mathbb{Z}_7[x]$ polinomgyűrűkben?

2.3. Feladat. Határozza meg az alábbi f és g polinomok legnagyobb közös osztóját a megadott polinomgyűrűkben:
(a) $f = x^3 + 2x^2 + 2x + 1,\quad g = x^3 + 3x^2 + 3x + 2,\quad \mathbb{R}[x]$;
(b) $f = -x^4 - 4x^3 + 34x^2 + 76x - 105,\quad g = x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 6x - 7,\quad \mathbb{Q}[x]$;
(c) $f = x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 4x + 1,\quad g = x^3 + 4x^2 + 4x + 3,\quad \mathbb{R}[x]$;
(d) $f = x^8 - 3x + 2,\quad g = x^7 + 4x^6 + x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 5x + 5,\quad \mathbb{Q}[x]$;
(e) $f = x^8 - 1,\quad g = x^6 - 1,\quad \mathbb{R}[x]$;
(f) $f = x^8 - \overline{1},\quad g = x^6 - \overline{1},\quad \mathbb{Z}_{13}[x]$;
(g) $f = x^{90} - 1,\quad g = x^{35} + 1,\quad \mathbb{R}[x]$;
(h) $f = x^{90} - \overline{1},\quad g = x^{35} + \overline{1},\quad \mathbb{Z}_7[x]$;
(i) $f = \overline{4}x^4 + \overline{2}x^3 + x^2 + x + \overline{2},\quad g = \overline{2}x^4 + \overline{3}x^2 + \overline{1},\quad \mathbb{Z}_5[x]$;
(j) $f = \overline{16}x^4 + \overline{6}x^3 + \overline{12}x^2 + \overline{15}x + \overline{10},\quad g = \overline{13}x^4 + \overline{13}x^3 + \overline{11}x^2 + \overline{14}x + \overline{3},\quad \mathbb{Z}_{17}[x]$.

2.4. Feladat. Tekintsük a $p = x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ és $q = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$ polinomokat.
(a) Határozza meg a p és q polinomok legnagyobb közös osztóját $\mathbb{R}[x]$-ben.
(b) Adja meg a $pu + qv = 17x^2 + 17x + 17$ egyenlet (u, v ismeretlen polinomok) egy megoldását $\mathbb{R}[x]$-ben.

2.5. Feladat. Határozza meg az $fu + gv = h$ polinomegyenlet u, v megoldásait $\mathbb{R}[x]$-ben.
(a) $f = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3,\ g = x^3 + x^2 + x - 3,\ h = -2x^3 + 2x + 12$;
(b) $f = x^8 - 3x + 2,\ g = x^6 - x^5 + 3x - 2,\ h = -x^5 + 3x^3 + x^2 + 4x - 4$.

2.6. Feladat. Oldja meg az u, v ismeretlen polinomokra vonatkozóan az alábbi egyenleteket a megadott polinomgyűrűben.
(a) $(x^4 + x^3 + x^2 + \overline{1})u + (x^3 + \overline{1})v = x^2 + \overline{1},\quad \mathbb{Z}_2[x]$;
(b) $(x^5 + x + \overline{2})u + (x^4 + \overline{2}x^2 + \overline{2}x + \overline{1})v = x^3 + x^2 + \overline{2},\quad \mathbb{Z}_3[x]$;
(c) $(x^4 + x^3 + x + \overline{1})u + (x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{2}x + \overline{1})v = x^2 + x,\quad \mathbb{Z}_5[x]$;
(d) $(x^6 + \overline{6})u + (x^4 + \overline{5}x + \overline{1})v = x^3 + \overline{5}x^2 + \overline{2}x + \overline{6},\quad \mathbb{Z}_7[x]$.

2.7. Feladat. A Horner-elrendezés segítségével számítsa ki a megadott $p \in \mathbb{C}[x]$ polinomok helyettesítési értékét a c helyen:
(a) $p = 16x^4 + 16x^3 + 6x^2 + x - 5,\ c = \frac{1}{2}$;
(b) $p = 54x^3 - 9x^2 + 6x - 2,\ c = -\frac{1}{3}$;
(c) $p = x^3 + 2x^2 - 3x + 2,\ c = 1 + i$;
(d) $p = x^4 - (1+i)x^3 - (2+3i)x + 1,\ c = 1 - 2i$.

2.8. Feladat. A Horner-elrendezés segítségével számítsa ki a megadott polinomgyűrűkben az alábbi p polinomok helyettesítési értékét a c helyen:
(a) $p = x^5 + x^4 + x^2 + \overline{1},\ c = \overline{1},\ \mathbb{Z}_2[x]$; (b) $p = x^6 + \overline{2}x^5 + \overline{3}x^3 + \overline{4}x^2 + \overline{2}x + \overline{1},\ c = \overline{3},\ \mathbb{Z}_5[x]$;
(c) $p = \overline{2}x^6 + \overline{3}x^2 + \overline{4}x + \overline{5},\ c = \overline{7},\ \mathbb{Z}_{11}[x]$; (d) $p = \overline{3}x^7 + \overline{3}x^4 + \overline{1},\ c = \overline{9},\ \mathbb{Z}_{13}[x]$.

2.9. Feladat. A Horner-elrendezés felhasználásával alakítsa át az alábbi $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomokat az $x - c$ polinom hatványai szerint rendezett alakba:
(a) $f = x^4 - 3x^3 + x + 2,\ c = -1$; (b) $f = 16x^4 + 16x^3 + 6x^2 + x - 5,\ c = -\frac{1}{4}$;
(c) $f = x^4 - 4ix^3 - 3x^2 - 2ix - 12,\ c = i$; (d) $f = x^4 + 4ix^3 - 7x^2 - 6ix - 4,\ c = -i$.

2.10. Feladat. A Horner-elrendezés felhasználásával alakítsa át a megadott polinomgyűrűkben az alábbi f polinomokat az $x - c$ polinom hatványai szerint rendezett alakba:
(a) $f = x^5 + \overline{2}x^3 + x^2 + x + \overline{2},\ c = \overline{2},\ \mathbb{Z}_3[x]$; (b) $f = x^5 + \overline{6}x^4 + \overline{4}x^2 + \overline{5}x + \overline{1},\ c = \overline{6},\ \mathbb{Z}_7[x]$;
(c) $f = x^6 + \overline{2},\ c = \overline{2},\ \mathbb{Z}_7[x]$; (d) $f = \overline{6}x^5 + \overline{5}x^4 + \overline{4}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{1},\ c = \overline{1},\ \mathbb{Z}_{11}[x]$.

2.11. Feladat. Alakítsa át az $f = x^4 + 8ix^3 - 26x^2 - 40ix + 21 \in \mathbb{C}[x]$ polinomot az $x + 2i$ polinom hatványai szerint rendezett alakba, és az elvégzett átalakítás segítségével határozza meg f gyökeit.

2.12. Feladat. Határozza meg a, b és c értékét úgy, hogy
(a) $(x^2 - 1)(x + 1) \mid ax^5 + bx^4 - x^3 - cx^2 + 1$ teljesüljön $\mathbb{Q}[x]$-ben;
(b) $(x^2 - x - 12) \mid x^4 - x^3 + ax^2 - 2x + b$ teljesüljön $\mathbb{R}[x]$-ben;
(c) $(x^2 + \overline{2}) \mid x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{a}x^2 + \overline{b}x + \overline{2}$ teljesüljön $\mathbb{Z}_3[x]$-ben.

2.13. Feladat. Határozza meg az a és b valós számokat úgy, hogy
(a) $(x - 1)^2 \mid x^n + ax^{n-2} + x^{n-5} + x + b$ teljesüljön ($n \geq 7$ rögzített természetes szám);
(b) $(x - 1)^2 \mid x^{n-1} + ax^{n-2} + x^{n-4} + x + b$ teljesüljön ($n \geq 6$ rögzített természetes szám).

2.14. Feladat.
(a) Határozza meg a 2.3. Feladat (a), (b) és (c) részében megadott f, g polinomok gyökeit, felhasználva az ott kapott eredményeket.
(b) Határozza meg a 2.4. Feladatban megadott q polinom gyökeit, felhasználva a feladat (a) részében kapott eredményt.

2.15. Feladat. Adjon meg lehető legkisebb fokszámú olyan valós együtthatós polinomot, amelynek $\frac{1}{2}$ és $1 + i$ egyszeres, i pedig kétszeres gyöke.

2.16. Feladat. Határozza meg azt a legalacsonyabb fokszámú polinomot, amely a $0, 1, 3$ helyeken rendre a $2, 3, 1$ értékeket veszi fel.

2.17. Feladat. Adjon meg lehető legkisebb fokszámú olyan komplex együtthatós f polinomot, amelyre $f(1) = 2$ és $f(i) = i$.

2.18. Feladat. Irreducibilis-e az alábbi $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom?
(a) $f = 3x - 2$; (b) $f = 3x^2 + 2x + 10$; (c) $f = x^3 + x^2 + x + 1$.

2.19. Feladat. Irreducibilis-e az alábbi $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom?
(a) $f = 3x - 2$; (b) $f = 3x^2 + 2x + 10$;
(c) $f = 2x^2 + 4x + 1$; (d) $3x^3 + 2x^2 - 4x + 1$.

2.20. Feladat. Adja meg irreducibilis hatványtényezős alakban a megadott p polinomokat az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett.
(a) $p = x^4 + 1$; (b) $p = x^6 - 1$; (c) $p = x^4 + 3x^2 + 4$;
(d) $p = x^6 - 27$; (e) $p = x^6 + 1$; (f) $p = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$;
(g) $p = x^4 + x^2 - 30$; (h) $p = x^7 + 7x^4 - 8x$; (i) $p = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

2.21. Feladat. Hány darab valós együtthatós irreducibilis polinom szorzatára bomlik fel az $x^{1973} + 1997$ polinom?